Kapitola 1

Zadania

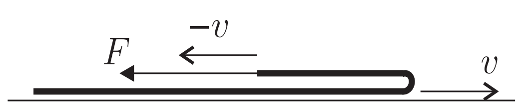
$\boxed{1.}$ Z povrchu Zeme v homogénnom tiažovom poli vyhodím rýchlosťou veľkosti v malú loptičku smerom nahor. V akej výške budú jej kinetická a potenciálna energia rovnaké? Potenciálnu energiu považujte za nulovú v nulovej výške.

$\boxed{2.}$ Dunajský vodník Robo má čudný zvyk. Keď vidí, že nad ním pláva nejaká loď, vyškriabe sa na jej prednú časť, tri krát prebehne po dĺžke celú palubu (s ohromnou radosťou plaší posádku) a vzadu skočí naspäť do vody. Na jeho prekvapenie sa raz ocitol presne na tom istom mieste riečneho dna, z ktorého začal vyliezať na loď. Ako rýchlosťou bežal, ak sa loď vzhľadom na breh pohybovala rýchlosťou u?

$\boxed{3.}$ Máme zdroj s napatím U, ku ktorému sme pripojili rezistor. Týmto rezistorom prechádzal prúd 3 A. Potom sme spravili to isté s iným rezistorom a dostali sme prúd 10 A. Aký prúd bude tiecť oboma rezistormi zapojenými za sebou k tomu istému zdroju?

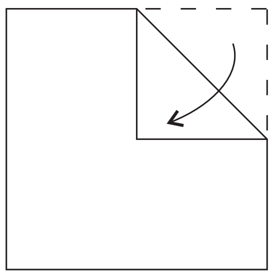
$\boxed{4.}$ Skúšobná jazda krásneho nového červeného Ferrari vyzerá asi takto. Najprv rovnomerne zrýchľuje, dosiahne maximálnu rýchlosť v a potom začne rovnomerne spomaľovať až kým nezastaví (zrýchlenie a spomalenie nemajú rovnakú veľkosť). Počas celého pohybu prešlo dráhu s. Na akom dlhom úseku sa pohybovalo rýchlejšie ako $v/2$?

$\boxed{5.}$ Po hladkej vodorovnej rovine sa rýchlosťou v pohybuje tenký a ohybný pásik s hmotnosťou m a dĺžkou l. V jednom okamihu chytím jeho prednú časť a začnem na ňu pôsobiť silou F, v dôsledku čoho sa jeden jeho koniec začne pohybovať rýchlosťou $-v$. Aká veľká je sila F?



$\boxed{6.}$ Fotografi Maťko a Kubko chcú odfotiť východ Slnka nad morom. Majú však problém - nevedia, kedy presne vychádza Slnko, a preto vyhútali nasledujúci plán. Maťko sa vyškriabe na palmu vysokú 20 m a keď zbadá prvé slnečné lúče, zakričí na Kubka, ktorý bude čakať s fotoaparátom prikrčený na pláži. Aký čas uplynie medzi týmito dvoma „východmi Slnka"? Aby sa im ľahšie počítalo, pricestovali na rovník akurát v čase jarnej rovnodennosti.

$\boxed{7.}$ Uvažujte štvorcový papierik so stranou a. Chytíme jeden roh papierika a zahneme smerom do stredu tak, ako je nakreslené na obrázku. Ako ďaleko od stredu pôvodného štvorca bude ťažisko tohto nového útvaru?



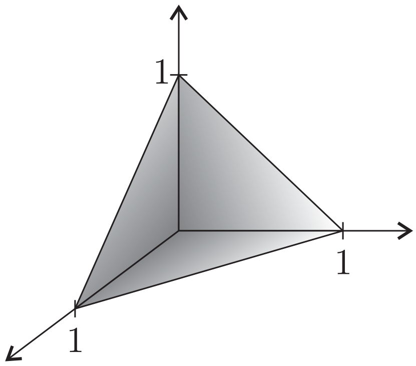
$\boxed{8.}$ Vo vesmíre poletuje nehmotná palička s dĺžkou l a na jej koncoch dva rovnako ťažké hmotné body A a B. Bodu A zrazu udelíme rýchlosť v kolmú na túto paličku. Po akom čase sa úsečka AB otočí o $90°$ vzhľadom na svoju počiatočnú polohu?

$\boxed{9.}$ Dve závažia s rovnakými hmotnosťami, ale rôznymi objemami V_1 a V_2 sa vznášajú ponorené v kvapaline s hustotou ρ. Navyše sú spojené pružinou tuhosti k, ktorá má v nenatiahnutom stave nulovú dĺžku. Aká je dĺžka pružiny, ak sa závažia vzhľadom na seba nehýbu?

$\boxed{10.}$ Na železničnej trati Bratislava - Piešťany dlhej $s = 100\,\mathrm{km}$ prebieha momentálne oprava koľajníc. Robotníci začali s opravou na prvých 5 km pri Bratislave a odvtedy sa opravovaný úsek s touto dĺžkou posunie každý deň o 50 m pozdĺž trate. Na starých koľajniciach sa vlaky môžu pohybovať rýchlosťou $v_s = 90\,\mathrm{km/h}$, na nových rýchlosťou $v_n = 120\,\mathrm{km/h}$ a na opravovanom úseku je povolená maximálna rýchlosť $v_x = 20\,\mathrm{km/h}$. Po akom čase od začiatku opráv budú vlaky na tomto úseku jazdiť rýchlejšie, ako za starých čias?

$\boxed{11.}$ Máme štyri náboje, všetky veľkosti Q, ktoré sú medzi sebou popriväzované motúzmi. Keď ich uvoľníme, v rovnovážnom stave vytvoria pekný obdĺžnik so stranami a a b, $a > b$. Aký je pomer veľkostí síl napínajúcich kratší a dlhší motúz?

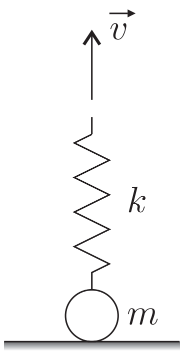
12. Ako ďaleko od bodu [0,0,0] sa nachádza ťažisko útvaru pozostávajúceho z troch tenkých trojuholníkových dosiek nachádzajúcich sa v rovinách súradnicových osí?



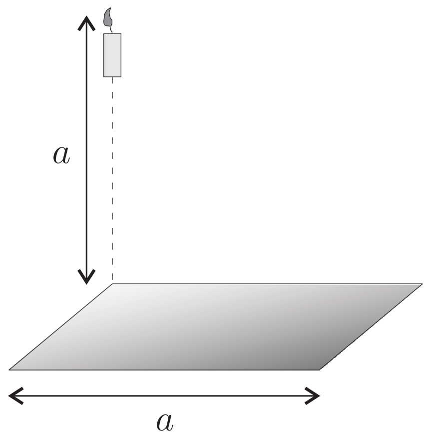
13. Fajoslav© má v kúpeľni rád svetlo. Odkedy pracuje ako vedec, prišiel na zaujímavý spôsob, ako si ho vyrobiť. Vo vani naplnenej čistou teplou vodou dôkladne rozmieša 50 ml rádioaktívnej látky s polčasom rozpadu 10 h. Na druhý deň sa v rovnakom čase ide kúpať znova. Voda však vychladla, preto $\frac{2}{3}$ jej objemu vypustí a doplní teplou. Koľko rádioaktívnej látky musí pridať, aby mal rovnako veľa "svetla"?

!!!Hrdina tohto príkladu (nie:-) je vymyslený, jeho napodobňovanie môže vážne ohroziť váš život alebo zdravie!!!

14. Na stole je položená gulička s hmotnosťou m upevená na pružine s tuhosťou k (obr.). V istom okamihu začneme voľný koniec pružinky ťahať kolmo nahor rýchlosťou v. Aké je jej maximálne predĺženie počas celého pohybu, ak jej počiatočná deformácia bola nulová?

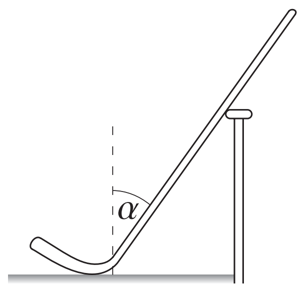


15. Vo výške a nad jedným z vrcholov vodorovného štvorca so stranou a svieti sviečka. Nie však hocijaká, ale svietiaca do všetkých smerov rovnako. Aká časť ňou vyžiarenej energie dopadá na spomínaný štvorec?

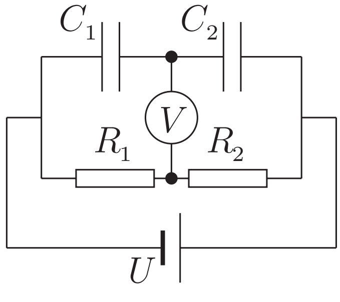


$\boxed{16.}$ Vo valcovej nádobe s podstavou $S = 0,01\,\mathrm{m}^2$ je plyn s dvojatómovými molekulami. Nádoba je tepelne izolovaná a uzavretá piestom hmotnosti m. Plyn má hodnoty stavových veličín $p_0 = 102\,\mathrm{kPa}, V_0 = 0,01\,\mathrm{m}^3, T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Ako sa zmenia tieto hodnoty, ak na piest položíme závažie s hmotnosťou $M = 10\,\mathrm{kg}$ a počkáme kým sa sústava ustáli?

$\boxed{17.}$ Na klzisku sa o mantinel opiera hokejka. Odhadnite, aký najmenší uhol α môže zvierať so zvislicou, ak koeficient trenia medzi ňou a mantinelom je f, zatiaľ čo trenie hokejky o ľad je zanedbateľne malé?

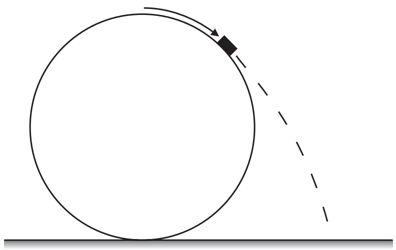


$\boxed{18.}$ Aké napätie ukazuje voltmeter na obrázku?



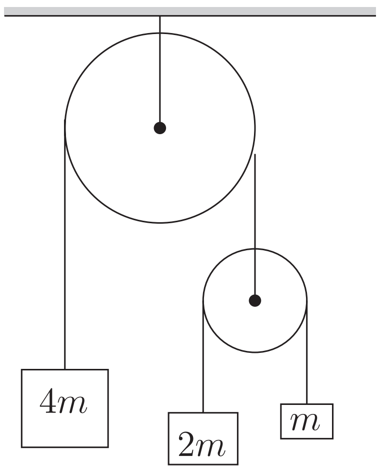
19. V rovine kolmej na homogénne magnetické pole sa nerelativisticky po kruhovej trajektórii s polomerom r pohybuje nabitá častica. Aký by bol polomer dráhy rovnakej častice s polovičnou kinetickou energiu?

20. Obruč polomeru 30 cm je kolmo upevnená na podlahu. Z vrcholu obruče sa kĺže bez trenia malé teliesko. Do akej vzdialenosti od bodu upevnenia obruče teleso dopadne?

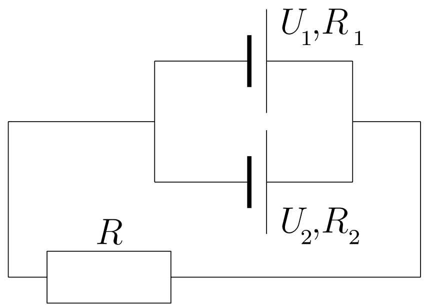


21. Minimálna rýchlosť, ktorou strela o hmotnosti m prerazí uchytenú dosku je v_0. Urč minimálnu rýchlosť v_1, ktorou tá istá strela prerazí tú istú dosku o hmotnosti M, ak uchytená nie je. Strela vnikne do ťažiska dosky.

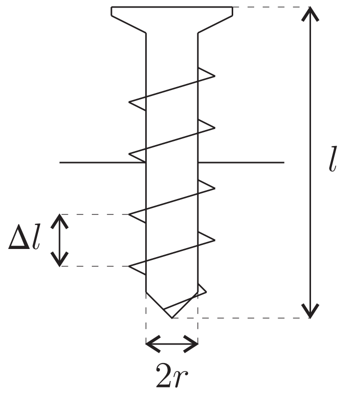
22. Uvažujte sústavu dvoch kladiek so zanedbateľnými hmotnosťami, ktoré sa môžu otáčať bez akéhokoľvek trenia. Na týchto kladkách sú rozvešané závažia s hmotnosťami $4m$, $2m$ a m. Aké je zrýchlenie najťažšieho z nich?



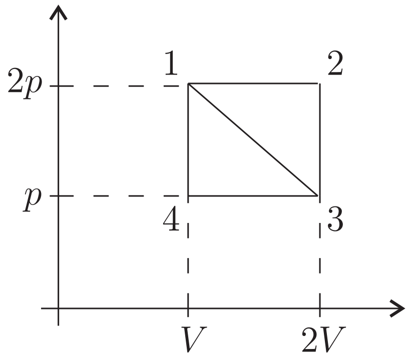
23. Kleofáš má rezistor s odporom $R = 3\,\Omega$ a dva zdroje s napätím $U_1 = 220\,\mathrm{V}$, resp. $U_2 = 110\,\mathrm{V}$ a vnútornými odpormi $R_1 = 5\,\Omega$, resp. $R_2 = 1\,\Omega$. Zapojil ich podľa obrázka. Aké je napätie na rezistore s odporom R.



$\boxed{24.}$ Skrutka s hmotnosťou m má tvar valca s polomerom r a malými vytŕčajúcimi závitmi. Polovicou svojej dĺžky je zaskrutkovaná do zvislej diery, v ktorej sa môže bez trenia otáčať a tým ďalej zaskrutkovávať. Ak ju ponecháme samú na seba, začne sa otáčať pod vplyvom gravitačnej sily. Za aký čas bude zaskrutkovaná celá, ake je jej dĺžka l a rozostupy medzi susednými drážkami závitu sú Δl?

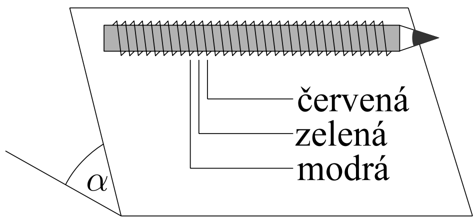


$\boxed{25.}$ Aký je podiel účinností cyklov 1-3-4-1 a 1-2-3-1 znázornených na obrázku?

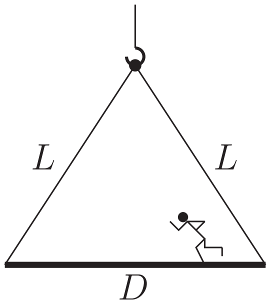


$\boxed{26.}$ Juraj a Džony majú radi turistiku. Jedného dňa mali za sebou ťažký výstup na kopec a práve odpočívali, keď tu zrazu zavonil Jurajov mobil. Džony bol k nemu bližšie a tak sa rozhodol, že ho Jurajovi hodí. V okamihu, keď sa letiaci mobi nachádzal v najvyššom bode svojej trajektórie, bol o h vyššie ako pri štarte. V tom istom okamihu počul Džony zvonenie s frekvenciou $f_{Dž}$ a Juraj s frekvenciou f_J. Ako ďaleko sú od seba obaja chalani?

$\boxed{27.}$ Máme homogénnu ceruzku valcovitého tvaru, okolo ktorej sú rovnomerne, striedavo navinuté červená, zelená a modrá nitka, jedna vedľa druhej. Polomer ceruzky je $R = 4\,\mathrm{mm}$. Ceruzka je na naklonenej rovine s uhlom sklonu α. Na začiatku ju držíme. Po akom čase T od toho, ako ju pustíme, sa nám začne javiť biela. Reakčný čas oka je $\tau = \frac{1}{28}\,\mathrm{s}$. Ceruzka pri svojom pohybe neprešmykuje a jej moment zotrvacnosti je $\frac{1}{2}mr^2$.

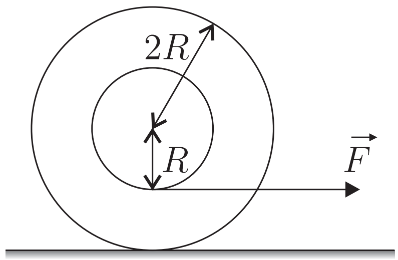


$\boxed{28.}$ Stavbár Ďuro sa znova zasníval prechádzajúc sa po stavbe, keď si zrazu uvedomil, že je na konci trámu, ktorý práve začal zdvíhať žeriav. Ako sa má Ďuro na tráme pohybovať, aby trám zostal vo vodorovnej polohe a nezačal sa nakláňať? Trám visí na dvoch lanách nemennej dĺžky L, ktoré sú upevnené na jeho koncoch.



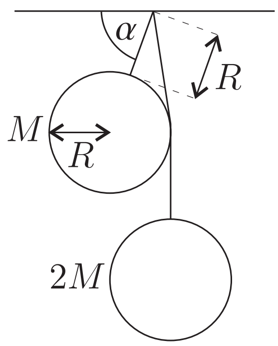
$\boxed{29.}$ Telekomunikačný kábel je navinutý na "cievke" s vnútorným polomerom R a vonkajším $2R$. Kábel je tenký, ale jeho hmotnosť M je oveľa väčšia ako hmotnosť cievky. Spojár Tomáš začne (zospodu cievky) ťahať kábel silou veľkosti

F. Ktorým smerom a akým veľkým zrýchlením sa začne kotúľať cievka, ak je trenie medzi ňou a podložkou dostatočne veľké na to, aby neprešmykovala?



$\boxed{30.}$ Vypuklé a duté zrkadlo s rovnakými polomeromi krivosti r_0 sú postavené proti sebe zrkadliacimi plochami tak, že ich optické osi splývajú a ich vzájomná vzdialenosť je $d = 2r_0$. Do ktorého bodu ležiaceho na spoločnej osi zrkadiel treba umiestniť bodový zdroj svetla, aby sa z neho vychádzajúce lúče po odraze na vypuklom a potom na dutom zrkadle znova stretli v tomto bode?

$\boxed{31.}$ Z vodorovného stropu visí na špagáte dĺžky R guľa s polomerom R a hmotnosťou M. Z rovnakého miesta visí na dostatočne dlhom špagáte druhá guľa s hmotnosťou $2M$. Gule sa nedotýkajú. Aký uhol zviera prvý špagát so stropom?



Kapitola 2

Riešenia

$\boxed{1.}$ Tesne po vyhodení má loptička kinetickú energiu $\frac{1}{2}mv^2$. Postupne sa mení jej kinetická energia na potenciálnu, ale zákon zachovania energie nám hovorí, že celková mechanická energia loptičky je konštantná. Môžeme teda napísa rovnicu

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_h}^2 + mgh$$

kde v_h je rýchlosť loptičky vo výške h. V hľadanej výške h_0 máme rovnosť kinetickej a potenciálnej energie, teda

$$\frac{1}{2}m{v_{h_0}}^2 = mgh_0$$

Po dosadení druhej rovnice do prvej dostávame

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mgh_0$$

odkiaľ

$$h_0 = \frac{1}{4}\frac{v^2}{g}$$

$\boxed{2.}$ Označme si rýchosť vodníka Roba v a dĺžku lode l. Robo prebehne loď trikrát za čas $t = \frac{3l}{v}$. Za tento istý čas sa zadný koniec lode ocitne na mieste, kde sa nachádzal predok v momente, keď sa naň vyškriabal Robo. Takže loď sa za čas t posunula (svojou rýchlosou u) o dĺžku l, vďaka čomu platí $ut = l$. Riešením sústavy rovníc dostávame $v = 3u$.

$\boxed{3.}$ Z Ohmovho zákona vieme, že odpory rezistorov sú $\frac{U}{3\,\mathrm{A}}$ a $\frac{U}{10\,\mathrm{A}}$. Keď ich zapojíme za sebou, výsledný odpor bude súčet jednotlivých odporov, teda $\frac{U}{3\,\mathrm{A}} + \frac{U}{10\,\mathrm{A}}$.

Opätovným použitím Ohmovho zákona dostávame prúd pri sériovom zapojení rezistorov, čo je podiel napätia a celkového odporu, teda $\frac{U}{\frac{U}{3\,\mathrm{A}}+\frac{U}{10\,\mathrm{A}}}$, čo je po úprave $\frac{1}{\frac{1}{3\,\mathrm{A}}+\frac{1}{10\,\mathrm{A}}} = \frac{30}{13}\,\mathrm{A}$.

$\boxed{4.}$ V tomto príklade využijeme, že prejdená dráha je rovná veľkosti plochy pod grafom rýchlosti ako funkcie času. Ten je jednoduché nakresliť – na začiatku je rýchlosť priamo úmerná času (Ferrari rovnomerne zrýchľuje z pokoja) a po dosiahnutí rýchlosti v je grafom klesajúca priamka (rovnomerné spomaľovanie z rýchlosti v na nulu).

obrazok

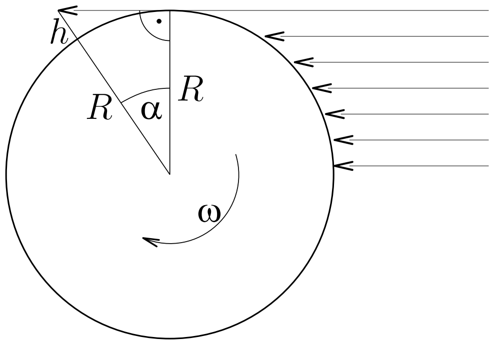
Najprv zistíme, na akom dlhom úseku sa Ferrari pohybovalo rýchlosou menšou ako $v/2$. Tú malo od času 0 do t_1 a od času t_2 až po koniec pohybu. Dráhe prejdenej na týchto úsekoch (označme ju s') zodpovedá súčet plôch jedného vyšrafovaného a jedného vyfarbeného trojuholníka.
Všimnime si teraz, že dve dvojice trojuholníkov – vyšrafované a sivé – majú rovnaký obsah. Preto dráha s' je rovná obsahu hrubo obtiahnutého trojuholníka. Pomer obsahov hrubo obtiahnutého a veľkého trojuholníka je $1/4$. Odtiaľ máme dráhu, ktorú Ferrari prešlo rýchlosou menšou ako $v/2$: $s' = s/4$. Nás zaujíma dráha, ktorú prešlo rýchlosou väčšou ako $v/2$, čo je $s - s' = \frac{3}{4}s$.

$\boxed{5.}$ Predstavme si nachvíľu, že pásik je presne v ohybe rozstrihnutý. Za čas Δt sa posunie spodná časť pásika o $\Delta l = v\Delta t$. Keďže vrchná časť pásika má rýchlos $-v$, táto sa tiež posunie o $\Delta l = v\Delta t$, ale v opačnom smere. Vzdialenosť koncov spodného a vrchného pásika po čase Δt bude teda $2\Delta l$. Aby sme ich opäť spojili, potrebujeme spodný pásik zahnúť o Δl. To znamená, že ak pásik nerozstrihneme, tak za čas Δt sa zmení rýchlosť kúska pásika o dĺžke Δl z v na $-v$ (teda zmena rýchlosti bude $\Delta v = -2v$). Hmotnosť tohoto kúska je $\Delta m = \rho\Delta l$, kde ρ je dĺžková hustota pásika, $\rho = \frac{m}{l}$. Vieme, že silu, čo túto zmenu rýchlosti spôsobuje, si môžeme vyjadriť ako zmenu hybnosti za čas, teda

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m \Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{l}\frac{\Delta l}{\Delta t}(-2v) = -\frac{2mv^2}{l}$$

Nás zaujíma iba veľkosť sily, čo je $\frac{2mv^2}{l}$.

$\boxed{6.}$ V čase rovnodennosti je na celej Zemi deň rovnako dlhý ako noc. To ale znamená, že zemská os otáčania je vtedy kolmá na spojnicu Zeme a Slnka. Nakreslím si obrázok v smere zemskej osi



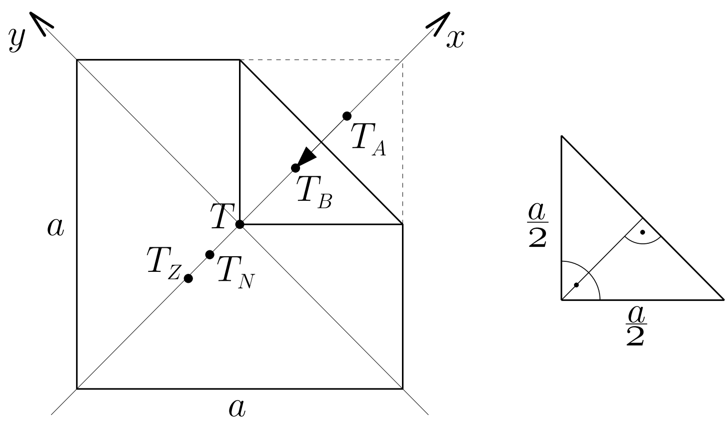
Odtiaľ vidno $\cos\alpha = \frac{R}{R+h}$. Hľadaný čas je potom doba t, za ktorú sa Zem vzhľadom na Slnko otočí o uhol α, zapíšem $t = \frac{\alpha}{\varpi}$. Ešte mi ostáva určiť uhlovú rýchlosť otáčania Zeme vzhľadom na Slnko. Na to využijem známy poznatok, že za deň, t.j. za $T_0 = 24\,\mathrm{h}$, sa Zem otočí vzhľadom na Slnko o plný uhol, to je $360\,^\circ$. Platí teda $\omega = \frac{360\,^\circ}{T_0}$. Potom riešenie

$$t = \frac{\alpha}{\omega} = \frac{\arccos\frac{R}{R+h}}{\frac{360\,^\circ}{T_0}} = \frac{\arccos\frac{R}{R+h}}{360\,^\circ}\,T_0 \approx 34,4\,\mathrm{s}.$$

$\boxed{7.}$ Označme hmotnosť papierika m. Potom hmotnosť preloženej časti je $\frac{1}{8}m$, lebo zaberá osminu plochy štvorčeka. Zvyšok má potom hmotnosť $\frac{7}{8}m$. Poloha ťažiska akejkoľvek sústavy je definovaná vzorcom

$$\overrightarrow{r}_T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

Ľahko môžete overiť, že výsledný moment síl sústavy podopretej v/pod/nad bodom, do ktorého smeruje polohový vektor ťažiska $\overrightarrow{r_T}$, bude nulový. Do obrázka si zakreslím súradnicové osi, zvolím si ich tak, aby to čo najviac vyhovovalo mne, lebo na tom, ako si ich umiestnim vôbec nezáleží pri zodpovedaní danej otázky.



Všimnite si, že ťažisko rohu pred otočením, po otočení, ďalej ťažisko celého štvorca, zvyšku štvorca bez rohu i výsledného telesa bude ležať priamo na x-ovej osi. Teda polohy všetkých ťažísk budú mať y-ovú súradnicu nulovú. Ďalej sa nám preto stačí sústrediť na x-ovú súradnicu a všetky rovnice s vektormi sa zjednodušia na rovnice o x-ovej súradnici. Vzorček o polohe ťažiska využijeme hneď dvakrát. Najprv zapíšem, že poloha ťažiska papierika bez preklopeného rohu bola presne v strede štvorca

$$0 = \frac{\frac{1}{8}mx_{T_A} + \frac{7}{8}mx_{T_Z}}{m} \Longrightarrow -\frac{1}{7}x_{T_A} = x_{T_Z}$$

Ďalej rovnica o novom ťažisku papierika

$$x_{T_N} = \frac{\frac{1}{8}mx_{T_B} + \frac{7}{8}mx_{T_Z}}{m}$$

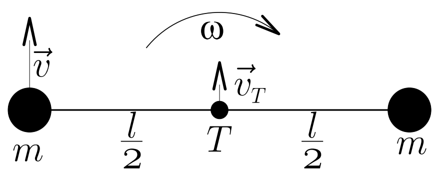
Do rovnice dosadím vzťah o x_{T_Z} z predošlej rovnice

$$x_{T_N} = \frac{1}{8}\left(x_{T_B} - x_{T_A}\right)$$

Stačí mi teda zistiť, o koľko sa posunulo ťažisko rohu. Ťažisko tohto pravouhlého rovnoramenného trohuholníka sa preklopením posunulo o dvojnásobok tretiny dĺžky ťažnice na základňu. Teda $|x_{T_B} - x_{T_A}| = \frac{2}{3}\frac{a}{2\sqrt{2}}$. Potom

$$|x_{T_N}| = \frac{1}{8}|x_{T_B} - x_{T_A}| = \frac{a}{24\sqrt{2}}$$

$\boxed{8.}$ Po počiatočnom "šťuchnutí" už na paličku nepôsobia žiadne sily, preto sa rýchlosť ťažiska nemení (zákon zachovania hybnosti). Kedže na ňu nepôsobia žiadne sily, tak aj celkový moment síl pôsobiacich na ňu je nulový a zachováva sa aj moment hybnosti.Naša palička nemení svoj tvar (má teda konštantný moment zotrvačnosti), preto môžem rovno povedať, že uhlová rýchlosť otáčania paličky sa meniť nebude. Rovnice popisujúce oba hmotné body paličky v čase hneď po "šťuchnutí" sú



$$\begin{aligned} v &= v_T + \omega\frac{l}{2} \\ 0 &= v_T - \omega\frac{l}{2} \end{aligned}$$

Z nich dostávame $\omega = \frac{v}{l}$, potom čas, za ktorý sa palička otočí o uhol $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ rad je

$$t = \frac{\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}}{\omega} = \frac{\pi l}{2v}$$

$\boxed{9.}$ Označme dĺžku pružiny l a hmotnosť závažia m. Veľkosť sili napínajúcej pružinu je potom kl. Zároveň je to aj veľkosť sili pôsobiacej spolu so vztlakovou silou na menšie závažie s objemom V_2. Platí teda

$$V_2 \rho g + kl = mg$$

Podobne sila veľkosti kl pomáha tiažovej sile udržať väčšie teleso pod vodou

$$mg + kl = V_1 \rho g$$

Riešením tejto sústavy dostaneme $l = \frac{(V_1 - V_2)\rho g}{k}$.

$\boxed{10.}$ Označme si dĺžku opravenej trate s_n, dĺžku opravovaného úseku s_x a dĺžku starej trate s_s. Vieme, že súčet všetkých troch úsekov je presne vzdialenosť medzi Piešťanmi a Bratislavou, teda

$$s = s_n + s_x + s_s$$

Taktiež poznáme dĺžku opravovaného úseku:

$$s_x = 5\,\mathrm{km}$$

Čas, ktorý vlaku trvá, kým prejde celú trať, je súčet časov, za ktoré vlak prejde jednotlivé úseky, teda

$$t = \frac{s_n}{v_n} + \frac{s_x}{v_x} + \frac{s_s}{v_s}$$

Po vyjadrení s_s z prvej rovnice a dosadení dostávame:

$$t = \frac{s_n}{v_n} + \frac{s_x}{v_x} + \frac{s - s_x - s_n}{v_s}$$

Otázka znie, kedy bude tento čas menší, ako dĺžka cesty vlakom za starých čias, teda $t < \frac{s}{v_s}$. Dostali sme nerovnicu

$$\frac{s_n}{v_n} + \frac{s_x}{v_x} + \frac{s - s_x - s_n}{v_s} < \frac{s}{v_s},$$

ktorú vyriešime pre s_n

$$s_n > s_{n0} = s_x \frac{v_x - v_s}{v_s - v_n} \frac{v_n}{v_x}$$

(Poznámka: všimnite si zmenu znamienka nerovnosti, ktorú spôsobilo násobenie výrazom $\frac{v_s - v_n}{v_s v_n}$, ktorý je menší ako 0)
Takže vlaky začnú jazdiť na úseku Bratislava – Piešany rýchlejšie, keď bude opravená trať dĺžky väčšej ako s_{n0}. Zadanie príkladu sa pýta na čas – ako dlho bude trvať, kým začnú vlaky jazdiť rýchlejšie. Keďže každý deň sa opraví 50 m, tra dĺžky s_{n0} bude opravená za $s_{n0}/50\,\mathrm{m}$ dní:

$$\frac{s_{n0}}{50\,\mathrm{m}} = \frac{s_x}{50\,\mathrm{m}} \frac{v_x - v_s}{v_s - v_n} \frac{v_n}{v_x} = 1400$$

$\boxed{11.}$ toto sme pridali na poslednu chvilu, treba zbusit vzorak

$\boxed{12.}$ Ťažisko každého z trojuholníkov sa nachádza vo vzdialenosti 2/3 ažnice trojuholníka od jeho vrcholu v bode $[0,0,0]$. Preto ťažiská trojuholníkov ležia na spojniciach bodov $[2/3,0,0]$ a $[0,2/3,0]$, $[0,2/3,0]$ a $[0,0,2/3]$,$[0,0,2/3]$a $[2/3,0,0]$. Ťažisko celého útvaru sa bude nachádzať v rovine preloženej týmito tromi spojnicami, teda na podstave hranola, ktorého steny tvoria tri pravouhlé trojuholníky s dĺžkou odvesny 2/3. Zo symetrie vyplýva, že vzdialenosť bodu [0,0,0] a ťažiska bude presne výška spomínaného hranola. Tú vypočítame jednoducho: vieme, že objem hranola $V = \frac{1}{3}Sh$, kde S je obsah podstavy a h je výška hranola. Objem vieme vypočíta dvojako:
$S_1 = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}$, $h_1 = \frac{2}{3}$
$S_2 = \frac{1}{2}(\frac{2\sqrt{2}}{3})(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3})$, h je v tomto prípade hľadaná výška (a i vzdialenos ťažiska od bodu [0,0,0]).
Položíme do rovnosti $\frac{1}{3}S_1h_1 = \frac{1}{3}S_2h$ a po úprave dostaneme $h = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

$\boxed{13.}$ Keďže polčas rozpadu látky je 10 h, po 24 hodinách z 50 ml látky ostalo $50\,\mathrm{ml}\left(\frac{1}{2}\right)^{24/10}$ látky. Z toho Fajoslav© ešte 2/3 vypustil, takže mu ostalo $50\,\mathrm{ml}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{24/10}$ látky. Aby ju doplnil späť na 50 ml, potrebuje dolia ešte $50\,\mathrm{ml}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{24/10}\right]$, čo je približne $46,84\,\mathrm{ml}$.

$\boxed{14.}$ Kým sa pružina natiahne na istú dĺžku, je gulička stále v pokoji na stole. Významný je okamih, kedy sa sila pružiny vyrovná gravitačnej sile, teda $mg = kx_0$. Keď sa teraz prenesieme do sústavy spojenej s koncom pružiny (pohybujúcim sa rýchlosou v), všimneme si, že gulička kmitá. Tu použijeme fintu na zjednodušenie výpočtov. Keď máme takúto situáciu (kmity v guličky v gravitačnom poli), nemusíme si to komplikovať gravitačnou potenciálnou energiou, ale stačí, ak počítame s novou rovnovážnou polohou. Tú sme už našli – rovnováha síl pôsobiacich na guličku nastáva pri predĺžení pružiny o $x_0 = \frac{mg}{k}$. Vieme, že v momente, keď sa gulička nachádza v rovnovážnej polohe (potenciálna energia je vtedy nulová), má rýchlos v vzhľadom na koniec pružiny. Pri maximálnom predĺžení x_{max} bude kinetická energia guličky nulová, pretože všetka jej energia bude premenená na potenciálnu energiu pružiny. Použitím zákona zachovania energie dostávame:

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 + 0$$

odkiaľ po úprave $x_{max} = v\sqrt{\frac{m}{k}}$. Toto je však výsledok vzhľadom na našu novú rovnovážnu polohu. Predĺženie pružiny oproti jej pokojovej dĺžke dostaneme ako súčet x_0 a x_{max}, čo je $\frac{mg}{k} + v\sqrt{\frac{m}{k}}$.

$\boxed{15.}$ Ako si môžeme všimnúť na obrázku, sviečku môžeme "obaliť" krabicou tvaru kocky o dĺžke strany $2a$ (sviečka je v strede krabice). Každá stena krabice obsahuje štyri štvorce so stranou dĺžky a a na každý z nich dopadá rovnako veľa energie. Takže celková energia vyžiarená sviečkou sa rovnomerne delí medzi $6 \cdot 4 = 24$ štvorcov. Na jeden štvorec teda dopadá $1/24$ vyžiarenej energie.

$\boxed{16.}$ Označme nové hodnoty stavových veličín ako p, V, T. Na začiatku bol tlak v nádobe práve taký, aby dokázal udržať piest s hmotnosťou m a okrem toho vyrovnávať atmosferický tlak, ktorý môžeme označiť p_A. Máme teda

$$p_0 = p_A + \frac{mg}{S},$$

pretože na piest pôsobí tiažová sila veľkosti mg, ktorá sa rovnomerne rozkladá na plochu S. Pridaním závažia sa zmení iba táto sila, takže

$$p = p_A + \frac{(m+M)\,g}{S} = p_0 + \frac{Mg}{S} \approx 111{,}81\,\mathrm{kPa}$$

Nádoba je tepelne izolovaná, preto stláčanie plynu bude prebiehať ako adiabatický dej, kedy platí $p_0 V_0^\kappa = pV^\kappa$, kde $\kappa = 1{,}4$ je konštanta adiabaty pre plyn s dvojatómovými molekulami. Po dosadení za p a úprave dostaneme:

$$V = \frac{V_0}{\left(1 + \frac{Mg}{p_0 S}\right)^{\frac{1}{\kappa}}} \approx 9{,}37.10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

Skombinovaním obyčajnej stavovej rovnice $\frac{p_0V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$ a $p_0V_0^\kappa = pV^\kappa$ dospejeme k $p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}T_0^{-1} = p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}T^{-1}$. Opäť dosadím za tlak p:

$$T = T_0\left(1+\frac{Mg}{p_0S}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \approx 307,98\,\mathrm{K}$$

Po pridaní závažia bude tlak v nádobe rovný $111,81\,\mathrm{kPa}$ a objem plynu $9,37.10^{-3}\,\mathrm{m}^3$. Teplota plynu stúpla na $307,98\,\mathrm{K}$.

$\boxed{17.}$ Na hokejku pôsobia štyry sily. Reakcia mantinelu, reakcia ľadu, trecia sila a tiažová sila. Sily si rozložíme do zvyslého a vodorovného smeru. Z obrázku potom dostávame

$$\begin{aligned} N_{1x} &= N_1\cos\alpha \quad N_{1y} = N_1\sin\alpha \\ T_x &= T\sin\alpha \qquad T_y = T\cos\alpha \end{aligned}$$

Ak má byť hokejka v pokoji, musí byť výsledná sila pôsobiaca v každom smere nulová, teda aj vo vodorovnom. Z toho dostávame

$$T_x - N_{1x} = 0 \Longrightarrow N_1 = T\tan\alpha$$

Pre veľkosť trecej sily platí $T \leq N_1 f$, takže

$$N_1 \leq N_1 f\tan\alpha \Longrightarrow \cot\alpha \leq f$$

Kedže kotangens je klesajúca funkcia, dostávame pre α podmienku $\alpha \geq \operatorname{arccot} f$. Najmenší uhol je teda v prípade rovnosti.

$\boxed{18.}$ Zamyslime sa najskôr, čo sa bude v obvode diať pred zapojením voltmetra. Na oboch vetvách zapojenia bude napätie U. Cez vetvu s odpormi bude podľa Ohmovho zákona pretekat prúd $I = \frac{U}{R_1+R_2}$. Podľa toho istého zákona bude teda na prvom z odporov napätie $U_1 = R_1I = \frac{R_1U}{R_1+R_2}$. Pozrime sa teraz na kondenzátory. Ich celková kapacita je $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$, výsledný efekt bude teda taký, akoby bol na ich mieste zapojený kondenzátor s takouto kapacitou. Pri napätí U by sa ňom nahromadil náboj $Q = CU = \frac{C_1C_2U}{C_1+C_2}$. Nakoľko celkový náboj na vnútornej časti zapojenia kondenzátorov musí byť nulový, na vonkajších doskách kondeznátorov bude opačný náboj. Na doskách prvého kondenzátora bude teda náboj Q, a preto bude na ňom napätie $W_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{C_2U}{C_1+C_2}$. Medzi bodmi A a B je teda rozdiel potenciálov W_1, medzi bodmi A a B je to U_1. Medzi bodmi C a B je teda potenciálový rozdiel $W_1 - U_1 = U\left(\frac{C_2}{C_1+C_2} - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$. A takúto hodnotu ukáže voltmeter, keď ho tam zpojíme.

$\boxed{19.}$ Na nabité teleso pohybujúce sa kolmo na homogénne magnetické pole pôsobí sila s veľkosťou $F = qvB$. Táto sila je navyše neustále kolmá na smer rýchlosti častice, bude teda dostredivou silou pre pohyb po kružnici. To znamená

$$F = qvB = \frac{mv^2}{r} \Longrightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Ak má druhá častica polovičnú kinetickú energiu, znamená to, že jej rýchlosť w bude

$$\frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{4}mv^2 \Longrightarrow w = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Aj ona bude opisovať pri svojom pohybe kružnicu, ale s polomerom

$$R = \frac{mw}{qB} = \frac{mv}{qB\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{20.}$ Najskôr sa bude teliesko šmýkať po obruči. Keď poklesne o výšku h, nadobudne rýchlosť $v = \sqrt{2gh}$. Pri padaní koná teliesko pohyb po kružnici s polomerom r, ktorého dostredivou silou je zložka tiažovej sily kolmá na povrch obruče. V momente, keď táto sila nebude dosť veľká na to, aby udržala teliesko na kruhovej dráze, začne sa druhá fáza pohybu, voľný pohyb v gravitačnom poli. Podľa obrázka je spomínaná zložka tiažovej sily rovná $F = mg\cos\alpha = mg\frac{r-h}{r}$ a teda teliesko sa odlepí od obruče vo výške danej podmienkou

$$\begin{aligned}
\frac{mv^2}{r} &= mg\frac{r-h}{r} \\
\frac{2gh}{r} &= g\left(1 - \frac{h}{r}\right) \\
2\frac{h}{r} &= 1 - \frac{h}{r} \Longrightarrow h = \frac{r}{3}
\end{aligned}$$

Vtedy bude vo výške $H = \frac{5}{3}r$, bude mať rýchlosť $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}gr}$, pričom jej vodorovná a zvyslá zložka budú mať veľkosť $v_x = \frac{2}{3}v_0$,$v_y = v_0\frac{\sqrt{5}}{3}$. Zvoľme súradnicovú sústavu ako na obrázku. V čase t po odlepení bude mať teliesko súradnice

$$\begin{aligned}
x &= v_x t = \frac{2}{3}t\sqrt{\frac{2}{3}gr} \\
y &= H - \frac{1}{2}gt^2 - v_y t = \frac{5}{3}r - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{\sqrt{5}}{3}t\sqrt{\frac{2}{3}gr}
\end{aligned}$$

Z podmienky $y = 0$ zistíme, v akom čase T teliesko dopadne na zem.

$$\frac{5}{3}r - \frac{1}{2}gT^2 - \frac{\sqrt{5}}{3}T\sqrt{\frac{2}{3}gr} = 0 \Longrightarrow T = \left(10 - \sqrt{10}\right)\sqrt{\frac{r}{27g}}$$

pričom neberieme do úvahy nefyzikálny záporný čas. Za tento čas prejde vo vodorovnom smere zvdialenosť

$$d = \frac{2}{3}T\sqrt{\frac{2}{3}gr} = \frac{20\sqrt{2} - 4\sqrt{5}}{27}r$$

K tomu nesmieme zabudnúť pripočítať polomer obruče, čím dostaneme hľadanú vzdialenosť

$$D = d + r = \frac{20\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 27}{27}r$$

$\boxed{21.}$ Ide o nepružnú zrážku. V prvom prípade sa všetka kinetická energia strely spotrebovala na prieraz dosky. Teda práca potrebná na prieraz je

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2$$

V druhom prípade hľadáme minimálnu rýchlosť, to bude zrejme vtedy, keď strela prejde doskou, no vzhľadom na ňu sa už po prieraze hýbať nebude. Využijeme zákon zachovania hybnosti sústavy doska-strela (predtým sa zachovala hybnosť sústavy doska-strela-Zem, ale Zemou len tak čosi nepohne...), preto môžem písať

$$\begin{aligned} p &= mv_1 = (M+m)v_2 \\ &\Rightarrow v_2 = \frac{mv_1}{M+m} \end{aligned}$$

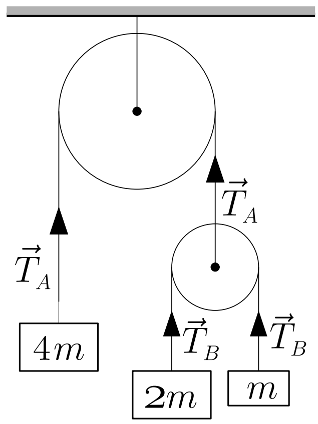
Energia sa nám tiež nestratí, platí

$$\begin{aligned} E_{k1} &= E_{k2} + W \\ \frac{1}{2}mv_1^2 &= \frac{1}{2}(M+m)v_2^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

Dosadením za v_2

$$\begin{aligned} mv_1^2 &= (M+m)\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v_1^2 + mv_0^2 \\ &\Rightarrow v_1 = v_0\sqrt{\frac{M+m}{M}} \end{aligned}$$

$\boxed{22.}$ Teleso s hmotnosťou $4m$ budem označovať indexom A, teleso s $2m$ indexom B a teleso s m indexom C. Kladný smer pohybu nech má smer nahor.



Keďže kladky sú prakticky nehmotné, tak výslednica síl pôsobiacich na ne musí byť nulová (akákoľvek nenulová sila by jej udelila nekonečne veľké zrýchlenie). Preto $2T_B = T_A$. Rovnica pre teleso A

$$4ma_A = -4mg + T_A$$

Telesá B a C pozorujme zo sústavy spojenej s menšou kladkou, tá má zrýchlenie $-a_A$, preto v tejto sústave máme zotrvačné sily. Keďže lano je zrejme ideálne, nenaťahovateľné, tak zrýchlenia oboch telies v tejto sústave sa budú líšiť len orientáciou (znamienkom).

$$2ma_B = -2mg + T_B + 2ma_A$$

$$-ma_B = -mg + T_B + ma_A$$

Sčítaním rovnice o telese B s dvojnásobkom rovnice o telese C

$$0 = -4mg + 3T_B + 4ma_A$$

$$\Rightarrow T_A = 2T_B = \frac{2}{3}\,4m(g - a_A) = \frac{8}{3}\,m\,(g - a_A)$$

Dosadím do rovnice o telese A o vyjde

$$a_A = -\frac{g}{5} \approx -1{,}96\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

$\boxed{23.}$ Označme prúdy I, I_1, I_2 ako na obrázku. Ďalej si zdroje rozdelíme na ideálne zdroje (bez vnútorného odporu) a rezistory s príslušnými odpormi.

Zapíšeme Kirchhoffove zákony. Pre prúdy platí

$$I = I_1 + I_2$$

Ďalej pre napätia v slučke so zdrojom č.1 a rezistorom

$$U_1 - I_1 R_1 - IR = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{U_1 - IR}{R_1}$$

Pre slučku so zdrojom č.2 a rezistorom

$$U_2 - I_2 R_2 - IR = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{U_2 - IR}{R_2}$$

Dosadením za I_1 a I_2 do prvej rovnice

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = \frac{U_1 - IR}{R_1} + \frac{U_2 - IR}{R_2} = \frac{U_1 R_2 - IR(R_1 + R_2) + U_2 R_1}{R_1 R_2} \\ &\Rightarrow I = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)} \end{aligned}$$

Napätie na rezistore potom je

$$U = |IR| = \left| \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)} R \right| \approx 100\,\mathrm{V}$$

$\boxed{24.}$ Skrutka sa bude pod vplyvom tiažovej sily pohybovať smerom nadol a roztáčať. Rýchlosť pohybu označme v, uhlovú rýchlosť otáčanie ω. Tie však nemôžu byť v ľubovoľnom vzťahu. Ak by sa skrutka pohybovala rovnomerne nadol rýchlosťou v, musí sa na dráhe Δl otočiť o plný uhol. Ak celý tento dej trvá čas t, potom platí

$$\begin{matrix} vt = \Delta l \\ \omega t = 2\pi \end{matrix} \Longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{\Delta l} v$$

Vráťme sa teraz k zaskrutkovávaniu. Keďže ide o pohyb bez trenia, bude sa zachovávať energia, potenciálna energia skrutky sa bude meniť na kinetickú a otáčavú energiu. Ak skrutka klesne o výšku h, bude pre jej rýchlosť platiť

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\left[1 + 2\left(\frac{\pi r}{\Delta l}\right)^2\right]v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{2gh}{1 + 2\left(\frac{\pi r}{\Delta l}\right)^2}} \end{aligned}$$

Vieme, že pre rýchlosť telesa voľne padajúceho v gravitačnom poli platí $v = \sqrt{2gh}$. Takže naša skrutka sa bude pohybovať, ako keby voľne padala v „gravitačnom" poli s tiažovým zrýchlením $g/\left[1 + 2\left(\frac{\pi r}{\Delta l}\right)^2\right]$. Všimnime si najskôr, že to je menej ako g, čo sedí s predstavou toho, že roztáčanie bude "pád" skrutky spomaľovať. Teraz si už ľahko spomenieme, že voľne padajúce teleso prejde dráhu $\frac{l}{2}$ za čas $\sqrt{\frac{l}{g}}$. To je presne dráha, ktorú potrebuje prejsť skrutka. Tej to ale bude trvať čas $t = \sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + 2\left(\frac{\pi r}{\Delta l}\right)^2\right]}$.

$\boxed{25.}$ Vieme, že práca, ktorú plyn vykoná pri kruhovom deji je rovná ploche útvaru, ktorý ohraničuje graf tohto dejav pV diagrame. Nakoľko oba deje ohraničujú rovnakú, nimi vykonaná práca bude rovnaká. Keďže účinnosť je definovaná ako pomer vykonanej práca a dodaného tepla, pre podieľ účinností bude rozhodujúci podiel dodaných tepiel.

$$\frac{\eta_{1-3-4-1}}{\eta_{1-2-3-1}} = \frac{\frac{W_{1-3-4-1}}{Q_{1-3-4-1}}}{\frac{W_{1-2-3-1}}{Q_{1-2-3-1}}} = \frac{Q_{1-2-3-1}}{Q_{1-3-4-1}}$$

Dodané teplo sa tak isto dá vyčítať z pV diagramu. Ide o obsah plochy pod časťou grafu, pri ktorej sa plyn rozťahuje, lebo presne vtedy mu teplo musíme dodávať. Podľa obrázka v zdaní potom $Q_{1-2-3-1} = 2pV$ a $Q_{1-3-4-1} = pV + \frac{1}{2}pV = \frac{3}{2}pV$ a výsledný hľadaný pomer

$$\frac{\eta_{1-3-4-1}}{\eta_{1-2-3-1}} = \frac{2pV}{\frac{3}{2}pV} = \frac{4}{3}$$

$\boxed{26.}$ Označme si zložku rýchlosti, ktorou bol mobil hodený v zvyslom smere w, vo vodorovnom smere v. Vieme, že šikmo vrhnuté teleso doletí do vzdialenosti $L = \frac{2vw}{g}$. Rýchlosť w vieme určiť z výšky, do akej výstúpil mobil. Podľa zákona zachovania energie $\frac{1}{2}mw^2 = mgh$, a teda $w = \sqrt{2gh}$. Rozdiel vo frekvenciách, ktroré chlapci počujú je spôsobený Dopplerovym javom. Podľa neho ak sa zdroj vlnenia s frekvenciou f_0 vzďaľuje od pozorovateľa rýchlosťou u, ten zachýtí vlnenie s frekvenciou $f = \frac{c}{c-u} f_0$, kde c je rýchlosť šírenia vlnenia. Keďže v najvyššom bode trejektórie je rýchlosť mobilu vodorovná, od Džonyho sa mobil rýchlosťou v vzďaľuje, k Jurajovi sa rýchlosťou v približuje. Teda

$$f_{D\check{z}} = \frac{c}{c-v} f_0, \;\; f_J = \frac{c}{c+v} f_0$$

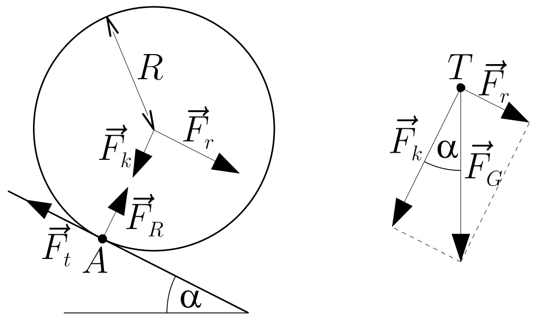
Ak dáme tiedo frekvencie do pomeru, zbavíme sa neznámej pôvodnej frekencie zvonenia. Získame tak rovnicu pre rýchlosť v.

$$\frac{f_{D\check{z}}}{f_J} = \frac{c-v}{c+v} \Longrightarrow v = \frac{f_J - f_{D\check{z}}}{f_J + f_{D\check{z}}} c$$

Poznáme v aj w, môžme teda dosadiť a dostaneme výsledný vzťah

$$L = 2c \frac{f_J - f_{D\check{z}}}{f_J + f_{D\check{z}}} \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

$\boxed{27.}$ Ceruzku urýchľuje zložka tiažovej sily o veľkosti $F_r = mg \sin\alpha$ (mg je veľkosť tiažovej sily, $\sin\alpha$ z nej urobí zložku v smere spádu naklonenej roviny). Ďalšia zložka F_k je kompenzovaná reakčnou silou F_R od podložky ($\perp$ na naklonenú rovinu).



Zapíšeme rovnicu pre výsledný moment sily pre bod dotyku A:

$$FR = M = J_A \varepsilon = (J_T + mR^2)\varepsilon$$

Moment zotrvačnosti pre plný valec vzhľadom na ťažisko je:

$$J_T = \frac{1}{2} m R^2$$

Dosadením do predošlej rovnice

$$\varepsilon = \frac{2F}{3mR} = \frac{2mg\sin\alpha}{3mR} = \frac{3}{2}\frac{g\sin\alpha}{R}$$

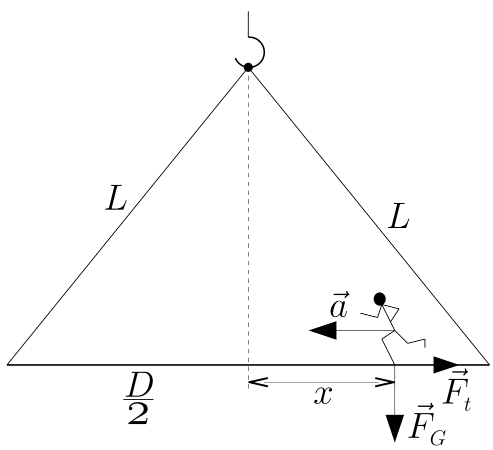
Teda ide o rovnomerne zrýchlený pohyb z nulovej začiatočnej uhlovej rýchlosti, preto

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Aby nám farby splynuli do bielej (červené svetlo + modré svetlo + zelené svetlo dajú dohromady biele), tak zrejme za čas τ sa ceruzka musí otočiť o toľko, aby sme na jednom mieste (cháp v danej vzdialenosti od niektorého z koncov ceruzky) videli všetky 3 farby a skončili na tej istej farbe, na akej sme začali. To je ale presne 1 celé otočenie, lebo keď sa ceruzka otočí o plný uhol, v danom mieste uvidíme naozaj tú istú farbu (lebo tam reálne bude tá istá nitka) a medzitým sa tam vystriedajú všetky farby. Ak tomu neveríte, tak si nakreslite plášť ceruzky rozvinutý do roviny. Zapíšeme

$$\begin{aligned}
\varphi(T) - \varphi(T-\tau) &= \Delta\varphi = 2\pi \\
\frac{1}{2}\varepsilon\left(T^2 - (T-\tau)^2\right) &= 2\pi \\
\frac{3}{2}\frac{g\sin\alpha}{R}\left(2T\tau - \tau^2\right) &= 4\pi \\
T &= \frac{4\pi R}{3\tau g\sin\alpha} + \frac{\tau}{2} \approx 0,29\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

$\boxed{28.}$ Označme si Ďurovu hmotnosť m. Nazvime x jeho výchyľku od stredu trámu. Vpravo nech je kladná. Označme vzdialenosť trámu od úchytu $h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}$. Trám má ostať v pokoji, preto moment síl pôsobiacich naň musí byť nulový. Skúmajme moment síl vzhľadom na bod úchytu trámu. Moment sily jeho vlastnej tiaže je zjavne nulový, ostáva moment sily od reakčných síl pôsobiacich na Ďura. To sú reakčná sila k tiažovej sile Ďura a sila reakčná k sile, ktorá mu udeľuje zrýchlenie $\vec{a}$.



$$\begin{aligned} M &= xmg - hF_t = xmg + hma = 0 \\ &\Rightarrow F = ma = -\frac{mg}{h}x = -kx \end{aligned}$$

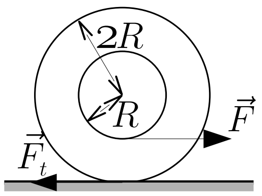
Takúto rovnicu určite poznáte, je to rovnica popisujúca harmonický pohyb oscilátora. Vieme, že potom uhlová rýchlosť je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{h}} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}}}$$

Potom vieme napísať závislosť Ďurovej polohy v čase ako

$$x = \frac{D}{2}\cos\left(\omega t\right) = \frac{D}{2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2}}}t\right)$$

$\boxed{29.}$ Kábel je tenký, preto Keďže hmotnosť cievky je sústredená v kábli, tak môžem smelo povedať, že moment zotrvačnosti je $J_T = \frac{1}{2}mR^2$. Ďalej viem, že cievka neprešmykuje, preto v každom čase platí $a = 2R\varepsilon$. Kladný smer pre zrýchlenie a nech je v smere $\vec{F}$, potom kladný smer pre ε je v smere chodu ručičkových hodiniek.



Pohybové rovnice pre posuvný a rotačný pohyb

$$\begin{aligned} 2mR\varepsilon &= ma = F - F_t \\ \frac{1}{2}mR^2\varepsilon &= J_T\varepsilon = 2RF_t - RF \\ &\Rightarrow F_t = \frac{3}{5}\,F \Rightarrow a = \frac{2F}{5m} \end{aligned}$$

$\boxed{30.}$ Popísaná situácia je zobrazená na obrázku. Na vypuklom zrkadle najskôr vzniká obraz bodu P, bod A. Ten sa následne dutým zobrazuje do bodu B.Podľa zobrazovacej rovnice pre odraz na prvom zrkadle

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{2}{r}\Longrightarrow a=\frac{xr}{2x-r}$$

Tá istá rovnica pre druhý odraz má tvar $\frac{1}{a+2r}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}$. Podmienka v zadaní hovorí, že body P a B sú jeden a ten istý bod, takže $b=2r-x$. Dostávame teda rovnicu pre vzdialenosť x. Vnej pre jednoduchosť zavedieme označenie $p=\frac{x}{r}$, takže $a=\frac{p}{2p-1}r$ a $b=(2-p)\,r$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{p}{2p-1}r+2r}+\frac{1}{(2-p)\,r} &= \frac{2}{r}\\
\frac{1}{\frac{p}{2p-1}+2}+\frac{1}{2-p} &= 2\\
\frac{2p-1}{5p-2}+\frac{1}{2-p} &= 2\\
4p-2p^2-2+p+5p-2 &= 20p-8-10p^2+4p\\
4p^2-7p+2 &= 0\\
p &= \frac{7\pm\sqrt{17}}{8}\Longrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}r
\end{aligned}$$

$\boxed{31.}$ Nakreslíme si obrázok a do neho sily, pôsobiace na prvú guľu. Ide o tiaťovú silu a ťah oboch lán. Zrejme platí $T'=2Mg$, nakoľko spodná guľa je v pokoji a výslednica na ňu pôsobiacich síl je nulová. Sily pôsobiace na prvú guľu si rozložíme na vdorovné a zvyslé zložky, pričom kladný smer volíme do prava a nahor.

$$\begin{aligned}
T_x=T\cos\alpha \quad &, \quad T_y=T\sin\alpha\\
T'_x=-2Mg\cos\beta \quad &, \quad T'_y=2Mg\sin\beta
\end{aligned}$$

Z vyznačeného trojuholníka dostáva podmienku $\sin(180^\circ-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)=\frac{R}{3R}=\frac{1}{3}$. Výslednica síl pôsobiacich na guľu musí byť nulová vo zvyslom aj vodorovnom smere, takže

$$\begin{aligned}
T\cos\alpha-2Mg\cos\beta &= 0\Longrightarrow T=2Mg\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\\
T\sin\alpha+2Mg\sin\beta-3Mg &= 0\Longrightarrow 2Mg\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\cos a}+2Mg\sin\beta=3Mg
\end{aligned}$$

Úpravou týchto rovníc nájdeme vzťah pre uhol α.

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{3}{2}\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{3}\end{matrix} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{3}{2}\cos\alpha-\frac{1}{3}=0\\
\cos\alpha \quad = \quad &\frac{2}{9}\Longrightarrow\alpha=\arccos\frac{2}{9}
\end{aligned}$$